

أخطاء المطلقة ذات خطأ النسبية عند إجراء العمليات الحسابية:

١- الجمع: إن الخطأ المطلق عند جمع عدة أعداد تقريبية لا يتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة عند حساب كل عدد فلو كان لدينا:

$$Z = Z_1 + \dots + Z_n$$

$$Z_1, \dots, \Delta Z_n$$

$$\Delta Z \leq \sum_{i=1}^n \Delta Z_i \quad \text{فإن}$$

$$\delta_Z \leq \frac{\Delta Z}{|Z_1 + \dots + Z_n|}$$

أما الخطأ النسبي:

$$Z = Z_1 - Z_2$$

$$\Delta Z_1, \Delta Z_2$$

$$\Delta Z_{1-2} \leq \Delta Z_1 + \Delta Z_2 \quad \text{فإن}$$

٢- الطرح: إذا كان:

أما الخطأ النسبي:

$$\delta_{Z_1-Z_2} \leq \frac{\Delta Z_{1-2}}{|Z_1 - Z_2|}$$

$$Z = Z_1 \cdot Z_2$$

٣- الضرب: إذا كان:

$$\Delta Z_{1 \cdot 2} \leq |Z_1| \cdot \Delta Z_2 + |Z_2| \cdot \Delta Z_1 \quad \text{فإن الخطأ المطلق:}$$

$$\Delta Z_{1 \cdot 2 \cdot 3} \leq |Z_1 \cdot Z_2| \cdot \Delta Z_3 + |Z_1 \cdot Z_3| \cdot \Delta Z_2 + |Z_2 \cdot Z_3| \cdot \Delta Z_1$$

$$\Delta Z_{1 \dots n} \leq \Delta Z_1 |Z_2 \dots Z_n| + \Delta Z_2 |Z_1 \dots Z_{n-1}| + \dots + \Delta Z_n |Z_1 \dots Z_{n-1}|$$

$$\delta_{Z_1 \dots Z_n} \leq \frac{\Delta Z_{1 \dots n}}{|Z_1 \dots Z_n|}$$

أما الخطأ النسبي:

$$Z = Z_1 / Z_2$$

ع. النسبة: إذا كان

$$\Delta_{Z_1/Z_2} \leq \frac{\Delta_{Z_1}}{Z_1} + \Delta_{Z_2} \frac{|Z_1|}{Z_2^2}$$

الخطأ المطلق:

$$\delta_{Z_1/Z_2} \leq \frac{\Delta_{Z_1/Z_2}}{|Z_1/Z_2|}$$

الخطأ النسبي:

مثال: لكن لدينا العددين المدون التاليين:

$$Z_1 = -1.5$$

$$Z_2 = 3.14$$

والمطلوب: أوجد الخطأ المطلق والنسبي عند تدوير هذان العددين.
 إجراء العمليات الأربعة (+ - × ÷)

أ- نعتبر العددين مدونان قربان فإن القيمة الحقيقية لهما معروفة فإن الخطأ المطلق أثناء تدوير العدد المطلق:

$$\Delta_{Z_1} \leq 5 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_{Z_2} \leq 5 \times 10^{-2}$$

⇐

$$\delta_{Z_1} = \frac{\Delta_{Z_1}}{|Z_1|} = \frac{5 \times 10^{-3}}{1.5} =$$

$$\delta_{Z_2} = \frac{\Delta_{Z_2}}{|Z_2|} = \frac{5 \times 10^{-2}}{3.14} =$$

ملاحظة: لو كان العددين مفروضا
 $Z_1 = -1.52$ و $Z_2 = 3.139$
 $\Delta_{Z_1} = |Z_1 - \tilde{Z}_1| = 0.02$ و $\tilde{Z}_1 = -1.5$
 $\Delta_{Z_2} = |Z_2 - \tilde{Z}_2| = 0.001$ و $\tilde{Z}_2 = 3.14$
 ملاحظة: في الدساتير السابقة إذا لم تكن القيمة الحقيقية معلومة نستخدم القيمة التقريبية.

$$\delta_{Z_1} = \frac{0.02}{1.52} =$$

$$\delta_{Z_2} = \frac{0.001}{3.139} =$$

$$\Delta_{Z_1 \cdot Z_2} \leq \Delta_{Z_1} + \Delta_{Z_2} = 5 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3} = 0.055$$

$$\delta_{Z_1 \cdot Z_2} \leq \frac{\Delta_{Z_1 \cdot Z_2}}{|Z_1 \cdot Z_2|} = \frac{0.055}{|-1.5 \cdot 3.14|} =$$

بالطرح:

$$\Delta_{z_1, z_2} \leq \Delta_{z_1} + \Delta_{z_2} = 0,055$$

$$\delta_{z_1, z_2} \leq \frac{\Delta_{z_1, z_2}}{|z_1 - z_2|} = \frac{0,055}{|1,5 - 3,14|} = \frac{0,055}{4,64} =$$

$$\Delta_{z_1, z_2} \leq \Delta_{z_1} |z_2| + \Delta_{z_2} |z_1| \quad \text{العزب:}$$

$$= 5 \times 10^{-2} |3,14| + 5 \times 10^{-3} |1,5| = c_3$$

$$\delta_{z_1, z_2} \leq \frac{\Delta_{z_1, z_2}}{|z_1 z_2|} = \frac{c_3}{|1,5| |3,14|} = c_4$$

القسمة:

$$\Delta_{z_1/z_2} \leq \frac{\Delta_{z_1}}{|z_2|} + \Delta_{z_2} \frac{|z_1|}{|z_2|^2} \leq \frac{5 \times 10^{-2}}{|3,14|} + 5 \times 10^{-3} \frac{|1,5|}{(3,14)^2} = c_5$$

$$\delta_{z_1/z_2} \leq \frac{\Delta_{z_1/z_2}}{|z_1/z_2|} = \frac{c_5}{|1,5/3,14|}$$

وظيفة: تعريف: ليكن $\begin{cases} z_1 = 1,5525 \\ z_2 = -3,14738 \end{cases}$ عدداً

- الطلب:
- 1- دور هذين العددين مرتبة عشرية واحدة ثم مرتبتين عشريتين ثم ثلاث مراتب عشرية واحد الخطأ المطلق والخطأ النسبي في كل مرة.
 - 2- أوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند إجراء العمليات الحسابية على هذين العددين بعد التدوير مرتبة عشرية واحدة.

محتوى الفصل الثاني

تقريب الدوال بكثيرات الحدود:

الاستيفاء: هو عملية استبدال دالة كثيرة حدود ذات درجة معينة بالدالة الحقيقية. كما تربية منها هدف تمكين إجراء العمليات الرياضية من تفاضل وتكامل و حساب مشتقات...

إضافة إلى ذلك، فمن معظم الأحيان تكون الدوال ذات صيغة تحليلية معقدة لا يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها التاملاً مثلاً يمكن إجراؤه فقط عندما يكون الدالة $y = f(x)$ دالة أصلية ومن المعلوم أن الدوال قد صُنفت ضمن مجموعات من كل مجموعة طريقة لتكاملها أو تفاضلها وبالتالي هناك مجموعة غير منتهية ليس لها دوال أصلية، وأثناء التقريب تلك الدوال نعبرها بالعمليات السابقة على كثيرات الحدود بدلا من الدالة والنتيجة تكون تربية من القيمة الحقيقية للتفاضل أو التكامل كما أن هناك العديد من الدوال تعطى بشكل جدول أو على شكل دالة تقايلها يتم استخدامها وبالتالي الصيغة التحليلية مجهزة ولا يمكن إجراء أي من العمليات الرياضية على تلك الدوال في مثل هذه الحالات نلجأ إلى تقريب الدوال كما أنه من السهل وضع برنامج لتكامل الدوال لكن هنا لكل صنف من الدوال برنامج الخاص بالطرائق التقريبية نضع برنامج للطريقة وكما نرى الدالة ويتم حساب التفاضل بشكل مخرج من الطرائق العادية ويتم ذلك بالشكل التالي:



سوف نعمل الفترة ما بين الدالة وكثير الحدود أو صغار النقاط x_0, x_1, x_2, x_3 التي تتساوى فيها الدالة مع كثير الحدود نسميها نقاط الاستيفاء.

• علاقة الاستيفاء: $f(x) \approx p_n(x)$

• نقاط الاستيفاء: $f(x_i) = p_n(x_i)$

هناك طرائق ومقدرة للاستيفاء ونما يعتمد على جداول الفروق ونما لا يعتمد على جدول الفروق.

• الطرائق التي تعتمد على جداول الفروق:

1- طريقة نيوتن - غريغوري "المباشرة":

تطبق هذه الطريقة عندما تكون المراتب بين نقاط الاستيفاء متساوية البعد:

$$|x_{i+1} - x_i| = h$$

- ونعتمد على جداول فروق تسطيح: جداول الفروق المباشرة.

• جدول الفروق المباشرة:

بفرض لدينا مجموعة من النقاط: x_0, x_1, \dots, x_n

y_0, y_1, \dots, y_n

نسحب الفروق المباشرة من المرتبة الأولى لفروق التالية:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0 & \Delta y_1 &= y_2 - y_1 & \Delta y_2 &= y_3 - y_2 \\ \Delta y_{n-1} &= y_n - y_{n-1} \end{aligned}$$

عددها "n"

الفروق من المرتبة الثانية هي الفروق التالية:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = y_4 - 2y_3 + y_2$$

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

عددها "n-1"

أما الفروق من المرتبة الثالثة هي الفروق التالية:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

$$\Delta^3 y_{n-3} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3} = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}$$

عدد 1
: n-2

ويمكننا نستخرجها نحصل على الفروق من المرتبة n والتي عدد 1
نلاحظ هنا أنه الأمثال في هذه الفروق هي أمثال متتالية الحد كـ
نوتنا "أ" أمثال مثلث باسكال:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

لنكتب الآن جدول الفروق المباشر لعدد محدود من النقاط:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_0			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$

ولا حظنا
أن عناصر جدول الفروق يمكن حسابها بعدة طرائق واحدة لعدد الأعمدة التسعة
في جدول الفروق.

لنعد الآن
في إيجاد كثيرة حدود استيفاء بطريقة نيوتن نبتدئ على المبر من التالي:

نلاحظ أن الدالة $f(x) = y$ قابلة الاستيفاء (n+1) مرة متتالية على المجال: $I = [x_0, x_n]$

عند ذلك فإن العلاقة التي تربط الفرق المباشرة بالمنتجان من المرتبة n تكون على الشكل التالي:

$$\Delta^{n+1} f(x) = h^{n+1} f^{(n+1)}(x)$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \frac{\Delta^{n+1} f(x)}{h^{n+1}} \quad , \quad h = |x_{n+1} - x_n|$$

• نبدل المنتجان الواردة في دستور تايلور بما يقابلها من الفرق المباشرة وفق البرمجة السابقة نبدأ بـ: كثير الحدود الاستيفاء بطريقة نيوتن-غزفوري:

$$P_n(x_0) = y_0 + S \cdot \Delta y_0 + \frac{S(S-1)}{2!} \cdot \Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$$+ \dots + \frac{S(S-1) \dots [S-(n-1)]}{n!} \Delta^n f_0 \quad , \quad S = \frac{x - x_0}{h}$$

• ملاحظة: لنفرض أن $y = f(x)$ قابلة الاشتقاق $(n+1)$ مرة متتالية على المجال I الذي يحتوي نقاط الاستيفاء وبالتالي فإن خطأ الاستيفاء بشكل عام يعطى بالعلاقة التالية:

$$R(x) = |f(x) - P_n(x)| = \frac{w(x) \cdot f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$

• فنختار النقطة x ضمن المجال الذي يحتوي نقاط الاستيفاء.
• عند نقاط الاستيفاء تكون النقاط مساوية للدالة والخطأ معدوم.

$$\max R(x) \leq \frac{w(x) \cdot \max f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$

• إذا كانت الدالة معلومة تحليلياً نشق الحد الأقصى من المرات وهو يزيد عن درجة كثير الحدود الاستيفاء بعدد واحد فقط.

أما إذا لم تكن الدالة معلومة تحليلياً فإننا نستعمل المشتقة الواردة عبارة الخطأ المركب بما يقابلها من جدول الفروق المباشرة وفقاً للمرضع السابقة.

• $w(x)$ هي عبارة عن:

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

x هي القيمة المراد حساب قيمة الدالة عندها

$(x - x_0) \dots (x - x_n)$ هي نقاط الاستيفاء.

مثال:

لنكن لدينا الدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	2	1	0	5

• اكتب جدول الفروق وأوجد كثير الحدود الاستيفاء بطريقة نيوتن المباشرة.
• أوجد قيمة تقريبية للدالة عندما $x=3$ واحسب الخطأ المركب.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-2	-3				
-1	2	5			
0	1	-1	-6		
1	0	-1	6	6	
2	5	5	6	0	0

ملاحظة:

إذا لم نعلم حساب كثيرة حدود استيفاء عند نقطة محددة فتكون x هي بداية المجال.

ويقالها Δ أما إذا طلب عند نقطة محددة فيجب الالتزام بتلك النقطة فتكون تلك النقطة ص ٢.

إذا درجة كثيرة الحدود الاستيفاء بعدد ما عدد نقاط الاستيفاء مطروح فيها العدد واحد. وباعتبار $\Delta y_0 = 0$ درجة كثيرة الحدود الاستيفاء من الدرجة الثالثة.

$$P_3(x_0) = f_0 + S \cdot \Delta y_0 + \frac{S(S-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!} \Delta^3 f_0$$

$$S = \frac{x - x_0}{h} = x + 2 \quad , \quad h = 1$$

$$\Rightarrow P_3(x_0) = -3 + (x+2)5 + \frac{(x+2)(x+1)}{2!} (-6) + \frac{(x+2)(x+1) \cdot x}{6} (6)$$

$$= -3 + 5x + 10 - 3(x^2 + 3x + 2) + x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$= -3 + 5x + 10 - 3x^2 - 9x - 6 + x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$= x^3 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow f(3) \approx P_3(3) = 22$$

$$R(x) \leq \frac{w(x) \max_{|u| \leq 1} f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}$$

الخطأ المركب

$$R(x) \leq \frac{w(x)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4(y_0)}{h^4} = 0$$

الخطأ المركب معمم وصانطابق كثيرة الحدود الاستيفاء مع الدالة.

ملاحظة:

لفرضنا أن الفروق الأخيرة $\Delta^4 y_0 \neq 0$ عند ذلك سيكون رتبة الخطأ المركب على الشكل التالي:
سيكون درجة كثيرة الحدود الاستيفاء من الدرجة الرابعة والخطأ المركب سيكون فيه مشتق من المرتبة الخامسة وهذا نصف نقطة النهاية الحالة ٣ هناك.